Entrelazamientos para procesos de ramificación Markovianos

Dr. Freddy Palma Mancilla

Colaboración: Dr. Ramsés H. Mena y Dr. Gerónimo Uribe

Marzo 2020

Esquema

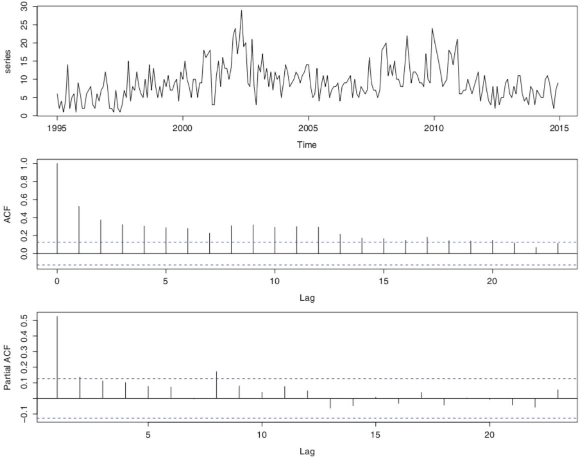
- Existen principalmente dos enfoques para caracterizar modelos Markovianos:
  - A través de las ecuaciones diferenciales estocásticas.
  - A través de su ley probabilística.
- Desde un punto de vista estadístico, es fundamental la disponibilidad de las probabilidades de transición.
- En caso contrario, se recurre a algunas metodologías para hacer inferencias:
  - Aproximaciones de SDE.
  - Inversión de funciones generadoras.

Objetivo: Caracterizar una clase de procesos de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$, con valores en $\mathbb{X}$, cuyas transiciones se puedan descomponer de la forma:

$$\mathtt{k}_t(x_0, x) = \int_{\mathbb{Y}} f_{X_t|Y_t}(x|y)\mathtt{f}_{Y_t|X_0}(y|x_0)\mathtt{d}y, \tag{1}$$

donde $(Y_t)_{t\geq 0}$ es un proceso de Markov con valores en $\mathbb{Y}$, $x_0, x \in \mathbb{X}$.

- [Gorgi,2018] Número mensual de crímenes reportados en la ciudad de Blacktown, Australia, de Enero 1995 a Diciembre 2014.



- Se propuso un modelo AR(1) en donde el termino del error cuya ley es binomial negativa.

- Alternativamente, se propone la versión continua

$$X_{t_2} \stackrel{d}{=} \sum_{j=0}^{X_{t_1}} K_j + \epsilon(t_1, t_2),$$

donde $K_0 = 0$, $(K_j)_{j\geq 1}$ son v.a.'s i.d.d. e independientes de $\epsilon(t_1, t_2)$ y

$$X_{t_1} \sim \mathrm{NB}(r, q).$$

- Este proceso caracteriza al proceso de nacimiento y muerte lineal con tasas infinitesimales:

$$q_{i,j} = \begin{cases} i\mu & \text{si } j = i-1, \\ i\lambda + \nu & \text{si } j = i+1, \\ -i(\mu+\lambda) - \nu & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- [Joe,H. (2003,2010)] Si la función característica de $\{X_t | X_{t-1} = x_{t-1}\}$ se denota por φ, y definimos

$$a(y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{\varphi(u) e^{-iuy}}{1 - e^{-iu}} \right) \mathrm{d}u.$$

Entonces se obtienen las transiciones del proceso $(X_t)_{t\geq 0}$.

- Utilizando operadores de adelgazamiento, en [Leisen, Mena, Palma and Rossini 2019] se encontraron las probabilidades de transición de X, las cuales son de la forma:

$$\mathrm{k}_t(x_0, x) = \sum_{y=0}^{x_0 \wedge x} \mathrm{NB}\left(x - y; r + y, \frac{q(e^{ct} - 1)}{e^{ct} - q}\right) \mathrm{Bin}\left(y; x_0, \frac{1 - q}{e^{ct} - q}\right).$$

- Para este conjunto de datos estimamos los parámetros del proceso.

Comparison of the estimation values and computational timing (in seconds) between our transition probability (Exact) and the Joe's transition probability (Numerical Inversion 1 and Numerical Inversion 2).

Transition probability	(r, q, c)	Time (in s)
Exact	(6.0865, 0.6031, 0.6848)	17.65 s
Numerical Inversion 1	(6.0865, 0.6486, 0.7237)	2575.60 s
Numerical Inversion 2	(6.5110, 0.4128, 0.9002)	17085.02 s

- Adicionalmente, evaluamos la precisión de nuestros estimadores, utilizando el MSE, y el desempeño de nuestras predicciones mediante el criterio log predictive score.

Esquema de filtrado estocástico

- Sea $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad.
- Sean $\{\mathscr{F}_t; t \geq 0\}$ y $\{\mathscr{G}_t; t \geq 0\}$ dos filtraciones tales que:

$$\mathscr{G}_t \subset \mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}, \qquad \text{para cada } t.$$

- Sea $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Markov c/r a $\mathscr{F}_t$.
- Sea $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Markov c/r a $\mathscr{G}_t$.
- Si existe $(\Lambda_t)_{t\geq 0}$ tal que $\mathbb{E}\left[f(X_t)\middle|\mathscr{G}_t\right] = \Lambda_t f(Y_t)$ para cada f, entonces X y Y estan entrelazados *i.e.*

$$\mathtt{Q}_t\Lambda = \Lambda\mathtt{P}_t.$$

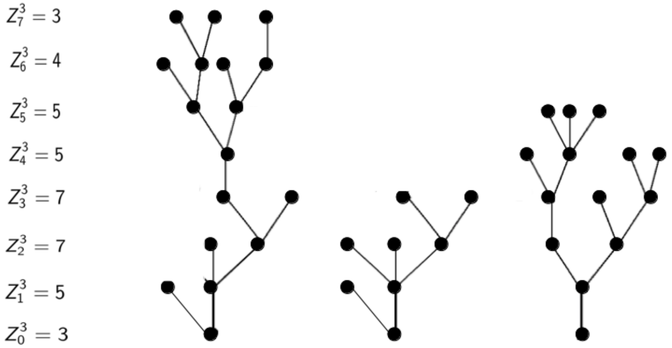
$$\begin{tikzcd}
X_{t+s} & & Y_{t+s} \arrow[ll, "\Lambda_{t+s}"'] \\
X_s \arrow[u, "P_s^{t+s}"] & & Y_s \arrow[ll, "\Lambda_s"'] \arrow[u, "Q_s^{t+s}"'] \\
X_0 \arrow[u, "P_0^s"] & & Y_0 \arrow[ll, "\Lambda_0"'] \arrow[u, "Q_0^s"']
\end{tikzcd}$$

Procesos de Galton-Watson

- Un procesos de Galton-Watson, $\mathrm{GW}_\kappa(\mu)$, con distribución de descendencia $\mu = (\mu_\ell)_{\ell \geq 0}$ es una cadena de Markov $Z^\kappa = (Z^\kappa_n)_{n\geq 0}$ tal que

$$P_{i,j} := \mathbb{P}(Z^\kappa_{n+1} = j | Z^\kappa_n = i) = \begin{cases} \mu_j^{*i} & \text{si } i \geq 1, j \geq 0, \\ \delta_{0,j} & \text{si } i = 0, j \geq 0. \end{cases}$$

donde μ^{*i} denota la i-ésima convolución de μ, con $Z^\kappa_0 = \kappa$.



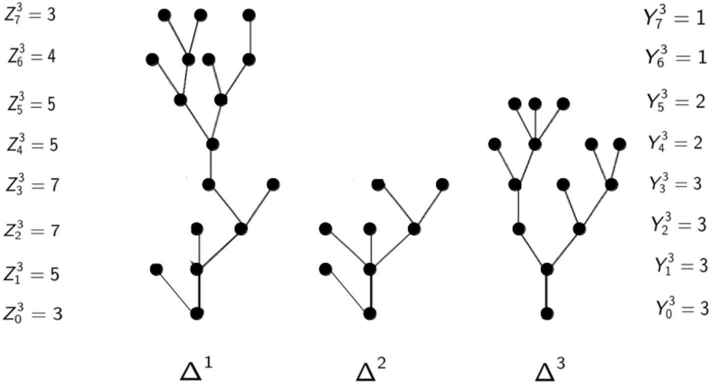
Procesos de Galton-Watson

- Sean $\Delta^1, \Delta^2, \ldots, \Delta^\kappa$ procesos GW independientes con distribución de descendencia μ tales que $\Delta_0^j = 1$, para $j = 1, \ldots, \kappa$. Se satisface:

$$Z_n^k \stackrel{d}{=} \Delta_n^1 + \cdots + \Delta_n^k.$$

- Definimos el proceso $Y^\kappa = (Y_n^\kappa)_{n \geq 0}$ de la siguiente forma:

$$Y_n^k = \#\Big\{ j \in \{1, \ldots, \kappa\} : \Delta_n^j > 0 \Big\}.$$



- Utilizamos la siguiente notación:

$$f(s)=\sum_{\ell\geq 0}s^{\ell}\mu_{\ell},\qquad \bar{m}=\sum_{\ell=0}^{\infty}\ell\mu_{\ell},\qquad \eta=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(Z_n^1=0).$$

- Se dice que el proceso Z^{κ} es critico, subcritico, supercritico, si $\bar{m}=1$, $\bar{m}<1$, $\bar{m}>1$, respectivamente.
- Definimos las siguientes filtraciones:

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_n &= \sigma\Big(\{\Delta_m^j; 0\leq m\leq n, j=1,\dots,\kappa\}\Big),\\ \mathscr{G}_n &= \sigma\Big(\{\mathbf{1}_{\{\Delta_m^j>0\}}; 0\leq m\leq n, j=1,\dots,\kappa\}\Big).\end{aligned}$$

Proposición.

- El proceso Z^k es un proceso de Markov con respecto a $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 1}$, denotamos su matriz de transiciones por $(P^n)_{n\geq 1}$.
- El proceso Y^k es un proceso de Markov no homogéneo con respecto a $(\mathscr{G}_n)_{n\geq 1}$, cuya matriz de transiciones satisface:

$$(Q_n^m)_{i,j} := \mathbb{P}(Y_m^\kappa = j | Y_n^\kappa = i) = \binom{i}{j} r_{n,m}^j (1 - r_{n,m})^{i-j},$$

  donde $r_{n,m} = \mathbb{P}(Z_m^1 > 0 | Z_n^1 > 0)$ y $r_{0,m} = f^{\circ m}(0) := \mathbb{P}(\Delta_m^j > 0)$.
- Adicionalmente, se tiene que

$$\mathbb{P}(Z_n^\kappa = j | \mathscr{G}_n) = \mathbb{P}(Z_n^\kappa = j | Y_n^k) := (\Delta_n)_{Y_n^\kappa, j}$$

- Por tanto, $Q_n^m \Delta_m = \Delta_n P^{m-n}$. En particular, como $\Lambda_0 = \mathtt{Id}$ se tiene que

$$P^m = Q_0^m \Delta_m.$$

Ejemplo:

- Sea $Z^{\kappa} = (Z_n^{\kappa})_{n\geq 0}$ un proceso de Galton Watson, con distribución de descendencia

$$\mu_\ell = (1-\mathrm{c})\mathrm{c}^\ell, \qquad \text{para } \ell \geq 0.$$

con $\mathrm{c} \in (0,1)$. Para este modelo tenemos que

$$f^{\circ n}(0) = \begin{cases} \dfrac{n}{n+1} & \text{si } \bar{m} = 1, \\ \dfrac{\bar{m}^n - 1}{\bar{m}^{n+1} - 1} & \text{si } \bar{m} \neq 1. \end{cases}$$

donde $f^{\circ n}$ denota la n-ésima composición de f consigo misma.

- Además, obtenemos que

$$(\Lambda_n)_{\ell,i} = \mathrm{NB}\Big(i-\ell; \ell, f^{\circ n}(0)\Big) \qquad \text{y} \quad \mathtt{Q}_{i,j}^{(0,n)} = \mathrm{Bin}\Big(j; i, 1 - f^{\circ n}(0)\Big).$$

para $n \geq 1$.

- Por tanto, las probabilidades de transición a n pasos de Z^{κ} están dadas por:

$$\mathrm{P}^{n}_{i,j} = \delta_{\{j\geq 1\}} \sum_{y=1}^{i\wedge j} \mathrm{NB}\Big(j-y; y, f^{\circ n}(0)\Big) \mathrm{Bin}\Big(y; i, 1-f^{\circ n}(0)\Big) + \delta_{\{j=0\}} \left[f^{\circ n}(0)\right]^{i},$$

- Adicionalmente, para $0 \leq n < m$ se obtiene la expresión

$$r_{n,m} = \frac{1-f^{\circ m-n}(0)}{1-f^{\circ n}(0) f^{\circ m-n}(0)}.$$

Algoritmo de simulación exacta para $\{Z^{\kappa}_{n} | Z^{\kappa}_{0} = i\}$ cuando $\mu \sim \mathrm{Geo}(1/2)$.

---

(1) Ingresar enteros n y κ.

(2) Simular número aleatorio binomial con parámetros κ y $\frac{1}{n+1}$, fijar en i.

(3) Simular número aleatorio binomial negativo con parámetros i y $\frac{1}{n+1}$, fijar en j.

(4) Imprime $i+j$.

Este resultado depende de la disponibilidad de una expresión "manejable" de $f^{\circ n}(0)$.

- S.Sagitov y A. Lindo (2016) caracterizaron una clase de distribuciones cuya f.g. es de la forma:

$$f(s) = A - \left[a(A-s)^{-\theta} + c\right]^{-1/\theta},$$

  con $\theta \in (-1,0) \cup (0,1]$, y $0 \leq s < A$.
- Esta clase de distribuciones es cerrada bajo convoluciones.

Estudiamos el caso que μ pertenece a esta clase de distribuciones, y encontramos una expresión para la matriz de transiciones de Z^{κ}.

- Un proceso CB $(X_t^x)_{t\geq 0}$ es un proceso de Markov sobre $[0,\infty)$, con trayectorias continuas por la derecha, tal que $X_0^x = x$ y

$$P_t(x+y,\cdot) = P_t(x,\cdot) * P_t(y,\cdot)$$

donde $P_t(x,\cdot)$ denota las probabilidades de transición de X_t^x, y $*$ denota la convolución. Además,

$$\mathbb{E}(e^{\lambda X_t^x}) = e^{-xu_t(\lambda)}.$$

Se sabe que $u_t(\lambda)$ satisface

$$\frac{\partial}{\partial t}u_t(\lambda) = -\Psi(\lambda),$$

donde Ψ es el exponente de Laplace de un proceso de Lévy espectralmente positivo, *i.e.*

$$\Psi(\lambda) = c\lambda + \beta\lambda^2 + \int_0^\infty (e^{-\lambda x} - 1 + \lambda x \mathbf{1}_{\{x<1\}})\nu(\mathrm{d}x)$$

donde $c \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 0$ y ν es una medida de Lévy, con $\Psi(0) = 0$.

Proposición .

Sea $X^x = (X_t^x)_{t\geq 0}$ un proceso CB con mecanismo de ramificación Ψ. Denotando por $(P_t^x)_{t\geq 0}$ a su semigrupo

$$P_t^x = Q_t^x \Lambda_t$$

donde Q_t^x es un operador Poisson con parámetro $xu_t(\infty)$, y Λ es un operador estocástico cuya transformada de Laplace es de la forma:

$$1 - \frac{u_t(\lambda)}{u_t(\infty)}.$$

- Interpretación. Dado que $X_0^x = x \in \mathbb{R}$, se tiene que sobreviven una cantidad Poisson, y de aquellos que sobreviven se genera un número aleatorio de descendientes siguiendo la ley de Λ.

- Para ejemplificar nuestros resultados encontramos las transición de X^x para:

$$\Psi(\lambda) = \begin{cases} \beta\lambda^2 & \text{caso Browniano} \\ c\lambda + \beta\lambda^2 & \text{caso Browniano con deriva,} \\ \lambda^{\alpha-1} & \text{autosimilar,} \\ c\lambda + \lambda^{\alpha-1} & \text{autosimilar con deriva,} \end{cases}$$

para $\alpha \in (1, 2)$.

ALGORITMO DE SIMULACIÓN EXACTA PARA $\{X_t^x\}$ PARA EL CASO BROWNIANO.

---

(1) Ingresar reales t y x.

(2) Simular número aleatorio Poisson con parámetro x/t, fijar en y.

(3) Simular número aleatorio gamma con parámetros y y $\frac{1}{t}$, fijar en v.

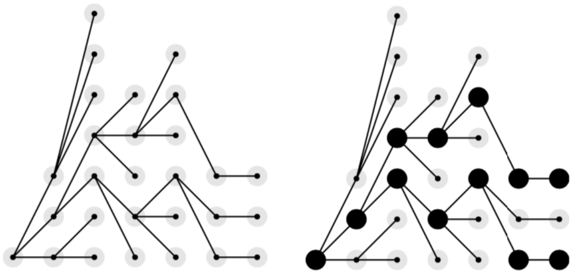
(4) Imprime v.

Trabajo actual

- Ideando otro tipo de relaciones de entrelazamiento.

  1) Analizar distintos tipos de procesos que se pueden definir dentro del contexto de procesos GW.
  2) Enfocamos en alguna relación que sea de nuestro interés.
  3) Definimos los dos procesos de interés de la forma que nos convenga, con su respectivas filtraciones.
  4) Estudiar la relación de entrelazamiento entre ellos.
  5) Explorar el comportamiento al límite.
  5) Entrelazamiento para procesos CB.

INDIVIDUOS PROLÍFICOS: La cantidad de individuos prolíficos Y^{k} dentro de una población supercritica Z^{κ} se definen como aquellos individuos que tienen descendencia en todas las generaciones futuras.



Sea Y^{κ} un proceso de GW con distribución de descendencia $\bar{\mu}$, cuya f.g. esta dada por:

$$g(s) = \frac{f(\eta + (1-\eta)s) - \eta}{1-\eta},$$

donde η es la probabilidad de extinción de Z^{κ}.

Proposición.

Denotando por P_n y Q_n a las matrices de transición a n-pasos de Z^κ y Y^κ, respectivamente. Existe un operador estocástico Λ, definido por:

$$\Lambda_{ij} := \mathbb{P}(Y_n^\kappa = j | Z_n^\kappa) = \binom{i}{j}(1-\eta)^j \eta^{i-j},$$

tal que

$$P_n \Lambda = \Lambda Q_n,$$

Además, se tiene que

$$g^{\circ n}(s) = \frac{f^{\circ n}(\eta + (1-\eta)s) - \eta}{1-\eta}.$$

Ejemplo:

- Si $\mu_\ell = (1-c)c^\ell$, con $c \in (0,1)$ y $c \neq 1/2$, para $\ell \in \{0,1,2,\ldots\}$, entonces

$$\{Y_n^\kappa | Y_0^\kappa = 1\} \sim \mathrm{Geo}(\eta^n).$$

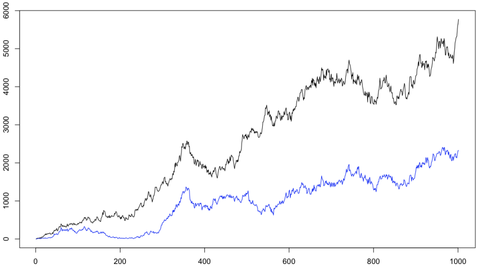
Modelos con inmigración.

Un proceso de Galton-Watson con inmigración Z^κ con κ individuos iniciales, con es una cadena de Markov sobre $\mathbb{N}$ tal que cuyas probabilidades de transición de i a j son:

$$\mathbb{P}(Z^\kappa_{n+1} = j | Z^\kappa_n = i) = (\mu^{*i} * \nu)_j.$$

donde μ y ν son las distribuciones de descendencia e inmigración, respectivamente.

- Suponer que la inmigración proviene de dos factores ajenos, pero sólo se tiene información total de la inmigración, *i.e.* $\nu = \nu_1 * \nu_2$.



Además, se sabe que el proceso esta caracterizado por (Ψ, Φ) que son conocidos como mecanismos de ramificación y de inmigración.

EJEMPLO:

- Sea X^x un proceso CBI, cuyo semigrupo es denotado por $(P_t)_{t\geq 0}$, con $\Psi(\lambda) = (\beta/2)\lambda^2$ y $\Phi_1(\lambda) = \delta_1\lambda$.
- Sea $\bar{X}^x$ un proceso CBI, cuyo semigrupo es denotado por $(Q_t)_{t\geq 0}$, con $\Psi(\lambda) = (\beta/2)\lambda^2$ y $\Phi(\lambda) = (\delta_1 + \delta_2)\lambda$.
- De modo que, X^x y $\bar{X}^x$ son procesos de Bessel cuadrado.
- En este caso, existe un operador de entrelazamiento Λ tal que:

$$Q_t\Lambda = \Lambda P_t$$

  donde

$$\Lambda f(y) = \mathbb{E}[f(yZ)],$$

  con $Z \sim \text{Beta}(\delta_1, \delta_2)$.

A esta relación se le conoce como el álgebra beta-gamma.

- Algunos otros ejemplos de interés se obtienen cuando:

$$\Psi(\lambda) = \begin{cases} \beta\lambda^2 & \text{caso Browniano} \\ c\lambda + \beta\lambda^2 & \text{caso Browniano con deriva,} \\ \lambda^{\alpha-1} & \text{autosimilar,} \\ c\lambda + \lambda^{\alpha-1} & \text{autosimilar con deriva,} \end{cases}$$

$$\Phi(\lambda) = \begin{cases} \delta\lambda & \text{caso Browniano con deriva y sin deriva} \\ \delta\lambda^{\alpha-1} & \text{autosimilar con deriva y sin deriva.} \end{cases}$$

Carmona, P., Petit, F. y Yor, M. (1998). Beta-gamma random variables and intertwining relations between certain Markov processes.

Gorgi (2018). Interger-valued autorregressive model with survival probability driven by a stochastic recurrence equation.

Leisen, Mena, Palma and Rossini (2019). On a flexible construction of a negative binomial model.

Miclo and Patie (2018). On a gateway between continuous and discrete Bessel and Laguerre processes.

Sagitov and Lindo (2016). A special family of Galton-Watson processes with explosions.

Zhu, J. (2010). Negative binomial time series models based on expectation thinning operators.

Gracias por su atención!